

数学的思考力を育む指導の在り方

－知識・技能，見方・考え方を活用させる授業を通して－

長嶋裕子 齊藤雄輔 田中真也

1 研究テーマ設定の趣旨

最近の教育課程実施状況調査や国際的な学力調査（TIMSS, PISA）において，基礎的な計算技能の定着についての低下傾向は見られなかったが，計算の意味を理解することなどに課題が見られたことや，身に付けた知識・技能を実生活や学習等で活用することが十分にできていない状況が浮き彫りとなった。これらの事実を筆頭にして，数学的に表現する力が不足していることや，数学を学ぶことの意義や有用性の認識が低いことなどが，数学教育を進めるにあたって大きな課題となっている。そして，それらをふまえての今後の数学教育における努力点が，旧学習指導要領改訂の議論において中心となってきたのは周知の事実であろう。

また，平成20年4月に行われた全国学力・学習状況調査の結果については，数学B（数量や図形などについての基礎的・基本的な知識・技能を活用することができるかどうかをみる問題）の15設問のうち，7問の正答率が5割を切り，中には正答率が2割を切る問題もあったという現状がある。さらにそのうちの数学的な説明を求められた4つの問題については，1つの問題の無回答率が5割強，残りの問題も無回答率が約3割という結果であった。平成19年に行われた調査についても同様の結果が出ており，こうした結果を受けて各学校において授業改善に努めていると思われるが，にわかに良い結果が出るといった状況にはなさそうである。

次に，本校生徒の実態について述べたい。まず，全国学力・学習状況調査の結果についてだが，19年度，20年度において，数学A・Bともに全国平均より高い正答率で解答できている。しかし，全国的な傾向と同様に，数学Bの特に数学の見方・考え方を問う設問について，正答率が低下し，無回答率も多いという傾向が見られた。数学Aより数学Bの方が低いという傾向については，ある程度は仕方がないことかもしれないが，既習の知識・技能，見方・考え方を日常場面へ活用できていないという状況を改善するための手だてを講じなければならないことが，我々の責務であることは間違いないだろう。次に，授業についてだが，本校数学科では，平成16年度からコミュニケーション活動を通して，平成19年度からは活用型学習活動（詳細は後述）を通して数学的思考力を育てる研究，実践を継続して行ってきた。生徒は日々の授業においても，コミュニケーション活動を自然に行いながら，身に付けた知識・技能，見方・考え方を活用し，新しい問題を解決しよ

うと前向きに取り組んでいる。それらの取り組みの成果もあって、生徒は自分の考えを相手に分かりやすく伝えることや、式や図に正しく表現することについて、少しずつ力を伸ばしてきている。

一昨年度、授業における指導改善の方針の1つとして、活用型学習活動を通して生徒の数学的思考力を育成していくことを研究テーマに据え、2年間様々な理論研究・実践を積み重ねてきた。上述の通り、それらの取り組みの方向性は正しいと言えるかもしれないが、今後も継続して指導を行い、さらにより良い授業づくりを目指していきたいと考えている。

2 研究計画

1 平成19年12月～平成20年6月（第1年次）

- ・数学の活用に関する調査を行う。
- ・本校数学科における「活用」についての考え方を整理し、「活用させる授業」の在り方を検討する。
- ・研究テーマを設定する。

2 平成20年7月～平成21年6月（第2年次）

- ・数学の活用に関する追加調査を行う。
- ・「活用」についての考え方の修正を行う。
- ・活用させるための手だてについて考察する。
- ・「活用させる授業」の事例を挙げ、実践する。

3 平成21年7月～平成22年6月（第3年次）

- ・活用させるための手だてについてまとめる。
- ・研究の成果と課題についてまとめる。
- ・「活用させる授業」の事例集をまとめる。

3 昨年度までの研究の概要

1 本校数学科の考える「活用」についての考え方

まず、生徒が既習の知識・技能、見方・考え方をどの場面へ活用していくのかということについては、①数学の他の問題場面への活用、②日常場面への活用、③他教科への活用の大きく3つに分類することにした。

次に、「活用」のとらえ方については、問題を解決する際に、それまでに蓄積してきた学習内容の中から、場面に応じて必要なものを自ら取捨選択し、状況によってはそれらを組み合わせて問題を解決できることと定義した。活用する学習内容は、既習の知識・技能であるが、そこには当然のことながら、見方・考え方も含まれている。既習の見方・考え方を活用して新たな問題を解決したり、既習の学習内容をより確かなものにするということが普段の授業において大切であると考えからである。そして、教師が生徒に何を活用させたいかを明確にした授業を「活用させる授業」と呼ぶことにした。また、数学科にお

ける「活用させる授業」において生徒が取り組む活動を、本校共同研究における「活用型学習活動」ととらえることとした。

2 「活用させる授業」を通して育てていきたい力

前述した活用の3つの場面、①数学の他の問題場面への活用、②日常場面への活用、③他教科への活用のそれぞれの視点から考えた。

①では、生徒は新たな数学の問題場面において、既習の知識・技能、見方・考え方を活用し、既習の学習内容をより確かなものにしていく。これは、活用させる授業によって、数学における基本的な力を伸ばしていく活動のサイクルである。

②では、生徒はまず日常における問題場면을数学の場面に置き換え課題設定をする、いわゆる数理化のプロセスにおいて生徒は既習の知識・技能、見方・考え方を活用していく。そして課題解決後に現実の場面に照らして解釈し、日常場面の問題の解決とする。日頃の指導においては、課題を発展させる活動を通してそうした力を育成していく。これは、活用させる授業によって、数学における発展的な力を伸ばしていく活動のサイクルである。

③についての考え方は②と同様である。他教科に関連した問題場면을扱うことによって、生徒は他教科と数学との関連を再認識するであろう。

4 今年度の研究

1 「活用させる授業」をつくるための手だて

次に、本校数学科が考えている「活用させる授業」をつくるために教師が意識することをここで整理しておく。

第一に、活用させたい知識・技能、見方・考え方を明確にすることである。これは当然のことであると思われるが、特に見方・考え方を活用させるには、教師が様々な見方・考え方について熟知し、どの見方・考え方をどのように活用させるのかを十分に考慮しながら授業展開していく必要があることを忘れてはならない。

第二に、同一単元だけではなく、別な単元あるいは違った領域においても活用させることを意識することである。この場合、活用させる内容がその授業の目標に直接には関連せず、後に学習する別の単元や領域において活かされることもあるが、そうした指導を繰り返すことで、広い視野を持って活用する力を育むことができると考えている。そのためには、今の学習が過去のどの学習につながっているのか、また今の学習がこのあとどこにつながっていくのか、常に意識しながら授業の計画を立てる必要がある。

第三に、授業において、課題解決の場面だけでなく、課題設定（提示）や課題発展の場面においても活用させることを意識することである。課題解決の場面で既習の知識・技能、見方・考え方を活用させることは、日頃より工夫がなされているのではないだろうか。ただし、課題解決の場面は、その授業の目標に直接つながることが多いので、常に広い視野を持って活用させるのにも限界があるだろう。そこで、それ以外の場面にも目を向けて活用させていくことを考えたい。課題設定（提示）の場面では、解決の糸口がつかみやすいように数理的に処理させることや、より多くの視点から課題を設定させるようにする。また、課題発展の場面においては、解決した課題の数値や条件を変えて発展させる指導を多

く取り入れ、様々な場面に照らし合わせて考えさせる機会を増やすようにする。日常場面における問題を数学の場面に置き換え、数学の問題として解決し、現実の場面に照らして解釈させるという一連の指導の機会を、問題解決型授業において増やしていくのである。

2 「活用させる授業」を行う際の手だて

ここでは、実際に授業を行う際の手だてを述べる。これらは、本校共同研究から出された3つのキーワード「自己の学習状況の認知」、「言葉の適切な使用」、「対人意識」に基づき、考えたものである。

(1) 「自己の学習状況の認知」について

生徒に自己の学習状況を正しく認知させることが思考・判断を促すことは間違いのないことであり、その繰り返しが数学的思考力の育成につながると考えている。本校数学科では、課題解決のための活動として、第一段階として個別による解決を行い、その後、第二段階として小集団による解決を行っている。そこで、それぞれの段階において、次のような手だてを取り入れた。まず、第一段階の個別による解決の際には、ただ単に個別解決させるのではなく、生徒の解決の様相を見とり、それらに合わせて、適宜、発問や投げかけをすることで、生徒の思考を整理していくというものである。「解決のために既習のどのような知識・技能、見方・考え方を使うのか」、「それらを使う際に留意すべき点は何か」を想起させるように授業を展開していく。個別解決の途中に、こうした生徒とのやりとりを取り入れ、解決のための思考を整理した上で、再度、個別解決に取り組ませるのである。具体的な例としては、第3学年の「相似の利用」の授業（詳細は後の実践事例にて紹介する）において、第一段階の個別による解決の途中に、過去（相似の単元においてのもの）に学んだ補助線の引き方を教師の問いかけにより全体で確認した（「平行線を引く」「相似な図形を作れるように引く」「むやみに引かずに最初は1本から引く」等）。再度個別解決の時間を確保した後、いくつかの星形を黒板に準備し、いくつかの引き方のパターンを代表生徒にかかせ、その補助線を引くことによってどんなことが明らかになるのかを1つ1つ確認し、全体に伝えた。そうすることで、生徒がただ漠然と解決に取り組むのではなく、自分が何が分かって何が分からないかを意識しながら思考できると考えた。そして、第二段階の小集団による解決を、お互いの疑問や考え等を確認したい、明らかにしたいという強い目的意識を持った活動にすることができると考えたのである。

次に、小集団による解決の際には、生徒が自分の考えを整理させながら話し合いをすることができるよう教師から話し合いの観点を与えるようにした。観点としては、「その式がどんなことを表しているのか説明し合う」「課題を解決するために用いた図を見せ合い、その図について説明し合う」など、話し合いの焦点を絞るためのものと、「自分と違う考え方の生徒とお互いの解法を交換し合う」「自力解決できなかった生徒は、解決できた生徒と疑問点について話し合う」など、話し合い自体を活性化させるためのものがある。具体的な例として、上と同じ実践事例において、個別解決の後に「B I の長さを導くために引いた補助線を確認し合うこと」、「立式するまでの考え方を確認し合うこと」を話し合いの観点として与えた。こうすることで、補助線と式の関連性に目を向けさせることができ、多くの生徒が立式までたどりつくことができた。

(2) 「言葉の適切な使用」「対人意識」について

数学では自分の考えを相手に明確に伝えるために、図・表・式などを上手に利用していく。複雑な思考を要する課題において、比較的シンプルな式に表し解決できるのが数学の醍醐味でもあるので、主に式を中心として自分の考えを簡略化して伝えようとする生徒が少なくない。もちろんその方が分かりやすい場合もあるが、特に複雑な思考を要する課題の場合、解決にいたるまでの考えの過程は様々であり、「どのような知識・技能を使って解決したのか」「解決にいたるまでの過程を誰が見ても分かるように表現できないか」「解決できたとしても疑問は残っていないのか」「解決できなかった場合にはどこでつまづいているのか」などを生徒自身に振り返らせることが大切であろう。そのために、図・表・式などを状況に応じて利用させていくことと同時に、自分の考えを言葉を用いて表現させる機会を今まで以上に増やすことにした。あえてそうしたことで、初めは面倒と感じる生徒もいたようだが、この活動が自分の考えを修正したり、発展させたりしていくことに次第に気付き、生徒自身の学習状況を認知するための助けとなったのである。

また、上記のことに加えて自分の考えを伝える時に、伝える相手を意識させる機会を今まで以上に増やすことにした。相手を意識して自分の考えをていねいに表現させるとともに、相手からその考えを評価してもらうことによって、他者の意見を取り入れたり、自分の考えをもう一度見直すことができるようにしたのである。ある考えについて「この表現が相手にどのように伝わるのだろうか」「この表現に対して相手はどんなことを尋ねてくるのだろうか」などの問いが自分の考えを深め、生徒自身の自己の学習状況を認知するための助けとなるのである。

そして、そのような活動を繰り返していくうちに、小集団での話し合いも充実するようになってきた。自分の考えをきちんと表現したり、たとえ表現しきれなくとも疑問点を言葉にしたりしてから小集団の話し合いに臨むことになるので、互いの考えの過程を理解するのに大きく役立っていた。また、解法が分からない相手に対して助言をする場合にも、相手の疑問に対してポイントを絞って助言ができていた。

具体的な例としては、第1学年の「方程式の導入」の授業（詳細は後の実践事例にて紹介する）を参照されたい。個別解決、小集団での話し合いを経てある程度考えを整理した後、自分の考えた過程を言葉でワークシートに書かせ、自分がどのように考えたのかを振り返らせた。その際、読む相手に自分の考えがきちんと伝わるように書くようにも助言した。その活動により、考えを式のみで表していた生徒も、言葉で補足説明を加えていたり、言葉だけでは足りないと感じた生徒は、後から図をかきいれたりしていた。その後、ワークシートを交換し合い（4人グループ）、コメントを書きあわせた。そこでは考えを分かりやすく表現できているかどうか確認させ、相手の考えがよく分からない時は質問をさせた。まだ1年生なのでコメントの視点は多くなかったが、全員が一生懸命相手に伝えようとしていた。

「活用させる授業」を進めるにあたって「言葉の適切な使用」「対人意識」に留意したことにより、結局は「自己の学習状況の認知」を助けることにつながり、数学的思考力の向上につながっていくことが明らかとなった。

活用させる授業とは

◎生徒が場面に応じて既習の知識・技能、見方・考え方を、自ら取捨選択できるように意図した授業。

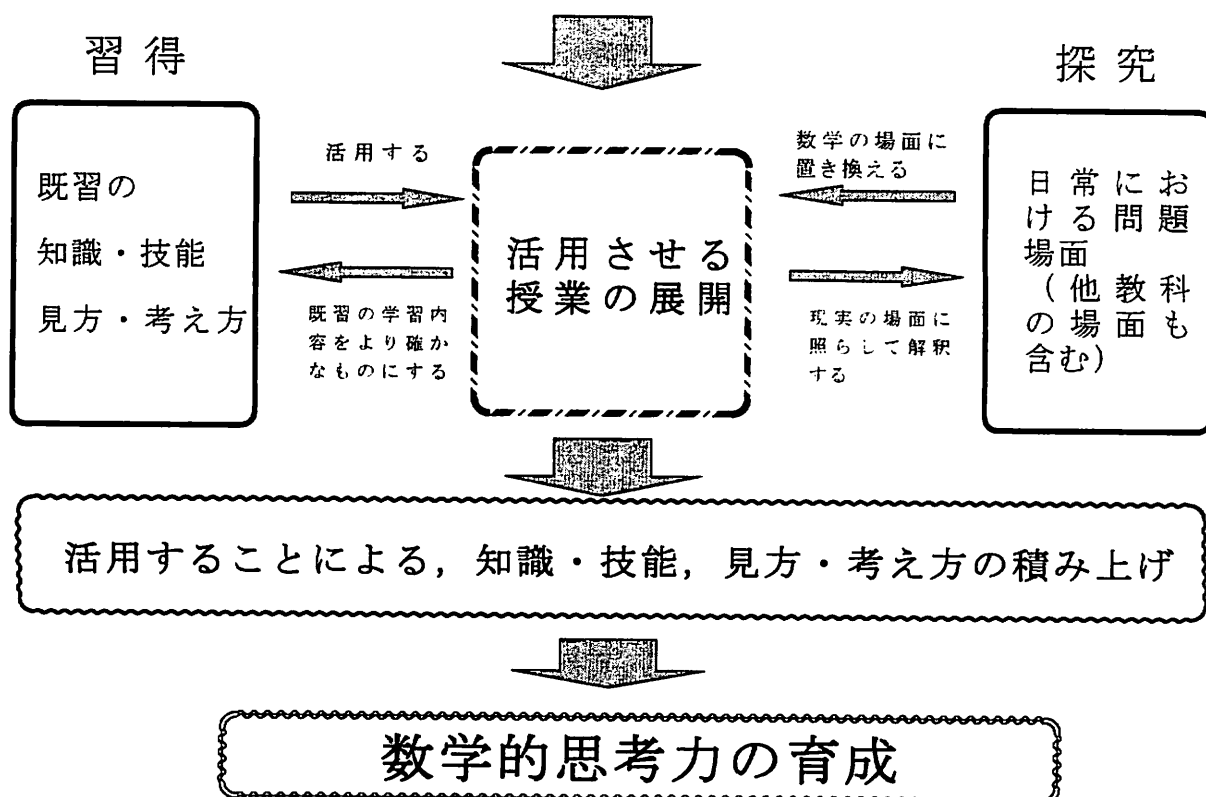
活用させる授業を進めるために

◎授業づくりにおいて教師が意識すること

- 活用させたい知識・技能、見方・考え方を明確にする。
- 既習の学習内容をどのように活用させるのかを明確にする。
- 同一単元だけではなく、別な単元あるいは違った領域においても活用させることを意識する。
- 今の学習が過去のどの学習に繋がっているのか、また今の学習が今後の学習のどこに繋がっていくのか、常に意識しながら授業の計画を立てる。
- 問題解決型授業において、課題解決の場面だけでなく、課題設定(提示)の場面、課題発展の場面においても活用させることを意識する。
 - ・課題設定時には解決の糸口がつかみやすいように数理的に処理させることや、より多くの視点から課題設定させるようにする。
 - ・解決した課題の数値や条件を変えるなどして、課題を発展させる指導を多く取り入れ、様々な場面に照らし合わせて考えさせる機会を増やすようにする。

◎実際の授業において教師が意識すること

- 個別解決の際には生徒の解決の様相を見取り、適宜発問や投げかけをすることで思考の整理をしていく。
(自己の学習状況の認知)
- 小集団による解決の際には、観点を明確にして話し合い活動をさせる。
(自己の学習状況の認知)
- 問題解決の過程における自分の考えを、図や式だけでなく言葉で記述させたり、お互いの考えたことやそれらの表現についてコメントを書かせたりして、自分自身の考えを振り返る機会とする。
(言葉の適切な使用)
- 自分の考えが相手にきちんと伝わるように意識しながら自分の考えや解決過程をかかせる。
(対人意識)



4 今年度実施した「活用させる授業」の実践事例

(1) 実践事例1 3学年『相似の利用』

生徒に自己の学習状況を正しく認知させることにより、思考・判断を促していく活用型学習活動の例

ア 授業のおおまかな流れ

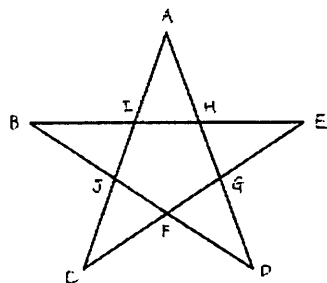
世界でシンボルマークとしてよく使われる星形五角形を題材として扱い、その辺の長さについて調べさせる。補助線を上手に引くことによって、相似や比の考え方が利用できることに気付かせ、2次方程式を利用すれば解決できるという見通しを立てさせていく。この計算は難易度が高く、導かれる解についても平方根が含まれるため、丁寧に説明する必要があるものの、補助線の引き方に関わらず同じ式となることや立式までの考え方は非常に明確で美しいことには気付かせたい内容である。また、黄金比について紹介し、美術作品の鑑賞などにおいて、新たな視点を持つことができることを示唆していく。

(導入)

星形五角形について知っていることを挙げてみよう。

(課題)

I Hの長さを1としたとき、B Iの長さはいくつになるだろうか。



イ 生徒に自己の学習状況を正しく認知させるための流れ

★教師の手だての流れ

①過去（相似の単元においてのもの）の補助線の引き方を教師の問いかけにより全体で確認する。→「平行線を引く」「相似な図形を作れるように引く」「むやみに引かずに最初は1本から引く」等

②いくつかの星形を黒板に準備し、いくつかの引き方のパターンを代表生徒にかかせる。その際、その補助線を引くことによってどんなことが明らかになるのかを1つ1つ確認し、全体に伝えるようにする。→「J Gを引くことによって△A I Hの△A J Gが明らかになる」「J Gを引くことによってA I : I J = A H : H Gが明らかになる」等

★生徒の思考の流れ

①教師や周囲のアドバイスから、補助線を引くことに気付く、この課題に合った補助線引くためにはどうすればよいか考える。（認知）

②いくつかの補助線の引かれた図を見比べたり、周囲の発言をヒントとし、補助線の引き方のポイントを絞るとともに、その補助線により相似や比の考え方が使えることに気付く。また、どのように補助線を引いても、解決への道筋が限られてくることに気付く。補助線が引けなかった生徒は出てきたもののどれかを真似て引くことになるだろう。（認知）

③「B Iの長さを導くために引いた補助線を確認し合うこと」「式を立てるまでの考え方を確認し合うこと」の2つの話し合いの観点を与え、小集団による話し合い活動をさせる。

③補助線に関わらず、同じ式となることに気付く。相似な図形が見つければ、比を用いた立式が容易なことから、お互いに考え方を説明しやすい。分からなかった生徒への助言にもなるし、解決できた生徒はそれまでの考えを整理できる。(認知)

教師は生徒が自然と立式できるように、かつ自ら考えを深めさせるように、短い時間で段階的に手だてを講じていった。また、状況に応じて間に個別解決の時間を確保した。

生徒にとって解決への見通しが立つための大切なポイントは、補助線により、どんな考え方(比)が使えるかに気付くことである。生徒は①→②→③と少しずつヒントを得ることによって、その都度自分がどこまで解決に近づいているのかを確認しながら進めることができた。

ウ 授業後の生徒の感想から

- ・黄金比については何となく知っていたが、まさか自分で導けるとは思わなかった。
- ・相似、比、2次方程式、平方根と色々なことを使って考えることができた。

(2) 実践事例2 1学年『方程式の導入』

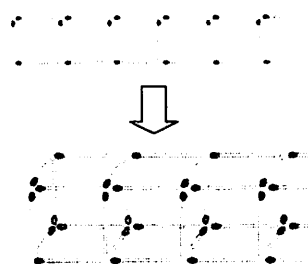
自分で課題を解決した過程を言葉で書かせることで、自分がどのように考えたのかを振り返らせる活用型学習活動の例

ア 授業のおおまかな流れ

マッチ棒を並べて正方形をつなげた形を、マッチ棒の本数を変えずに立方体をつなげた形に並べ直し、そのときにできた立方体の個数からはじめにできていた正方形の個数を求めさせる。この課題解決を通して、小学校で学習したマッチ棒をまとまりで数えたり、規則性に注目したりする考え方を活用させたい。また、中学校で学習した文字式を利用して等式をつくっている生徒の意見を取りあげながら、文字式を使うと数量関係をより分かりやすく表現できることに気付かせていく。数のみの式では一見別々に見えるものでも、文字式を利用し整理すると、同じ数量を表していることにも触れ、数学的な表現のよさを感じ取らせながら、これから学習する方程式の導入としたい。

(課題)

マッチ棒を何本か並べて、正方形をつなげた形をつくった。同じ本数のマッチ棒を使って、立方体をつなげた形に並べかえたら、立方体が6個つながった。
はじめにできていた正方形の個数は何個でしょう。



イ 生徒に自分の考えを振り返らせるための流れ

★教師の手だての流れ

- ①小集団による話し合い活動をさせるときに、「解決できなかった生徒は、解決できた生徒のところへ行き、ワークシートにまとめながら解法を確認する。」「解決できた生徒は、同じ方法で解決していた場合には、答えの確認をし、違う方法で解決していた場合には、互いの解法の交換をする。」の2つの話し合いの観点を与える。
- ②自分の考えた過程を言葉でワークシートに書かせ、自分がどのように考えたのかを振り返らせる。また、読む相手に、自分の考えがきちんと伝わるように書くよう、助言する。
- ③ワークシートを交換し合い（4人グループ）、コメントを書き合う。考えを分かりやすく表現できているかどうか確認し、相手の考えがよく分からない時は質問をさせる。

★生徒の思考の流れ

- ①解決できなかった生徒は、自分がつまづいている点に気付いたり、それを解決する糸口を見つけたりする。解決できた生徒は、自分の考え方が適切かどうか、さらによいやり方はないかについて考える。（認知）
- ②自分の考えが相手にきちんと伝わるように意識しながら言葉で書く。そのことを通して今までの思考の過程を順序よく整理したり、何を活用したのかを意識したりすることができる。（言葉・対人→認知）
- ③自分の考えがきちんと伝わるかどうか確認し合う。お互いにコメントを書くことで相手の考えた過程やまとめ方の良さについて、より深く考えることができる。（言葉・対人→認知）

1年生なので、数多くの指示を出すことを避けて、「考えた過程を言葉でていねいに書く」「読む相手に自分の考えがきちんと伝わるように書く」の2つにポイントを絞った。この活動を通して、考えを式のみで表していた生徒も、言葉で補足説明を加えていたり、言葉だけでは足りないと感じた生徒は、後から図をかきいれたりしていた。その後のコメントの書き合いにおいては、その視点こそ多くはないが、全員が一生懸命相手に伝えようとしていた。

ウ 4人グループ内で交換し合った生徒のコメントから

- ・立方体の図がかかれていますので、図を見ながら考え方を想像できてよかった。
- ・式のところに言葉でその数字が何を表しているかが書いてあったので、意味がよく分かりました。
- ・なぜマッチ棒の本数が52本と分かったのですか？この答えにたどりつく経路が分かりません。

5 研究の評価

本研究の最後に、我々の実践に対して評価をしていきたい。本研究のねらいである数学的思考力の育成のために、「知識・技能、見方・考え方を活用させる授業」が有効であったのか、また、「活用させる授業」を進めるための手だてが本当に生徒の思考を促したのかを考察をしていくわけだが、数学的思考力全般を数値化するのは困難であり、また「活用させる授業」により数学的思考力が高まったかどうかを判断するのも困難である。

しかし、この実践を通して教師も生徒も、数学の授業に対する意識に変容が見られ、また生徒が課題を解決する際、自分の考えの表現の仕方についても変容が見られた。そこで、教師と生徒側の双方の視点からその変容について事例も交えながら詳しく分析していくことで、本研究の評価としていきたい。

1 教師の変容

(1) 授業作りにおいての変容

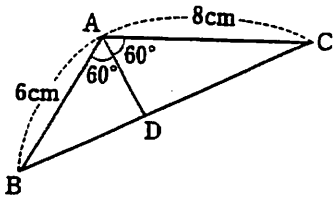
既に述べてきたことであるが、活用させたい知識・技能、見方・考え方を明確にし、それをどのように活用させるのかをきちんと考える機会が増えた。

ア 「補助線の引き方」というテーマを意識した指導を通して

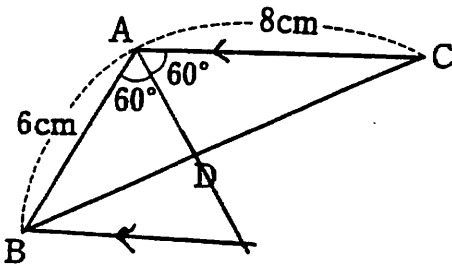
例えば、前述の「相似の利用」の実践事例について、補助線の引き方を活用させるわけだが、そのために同じ単元の「平行線と比」の授業において、補助線を引くことによって相似比が有効に利用できる問題解決場面を取り入れ、補助線の引き方の1つの方法として、平行線を引くことや、相似な図形を作れるように引くことを学ばせた。

(参考)「平行線と比」において扱った問題

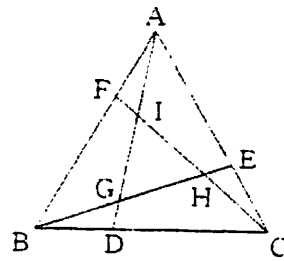
次の図で、 $AB = 6\text{ cm}$ 、 $AC = 8\text{ cm}$ のとき、 $BD : DC$ を求めなさい。



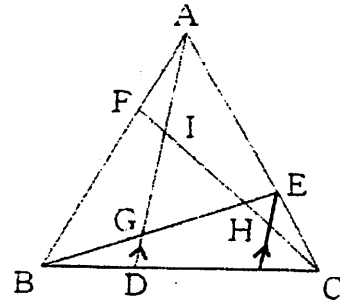
平行線をヒントとして、相似な三角形を作った図



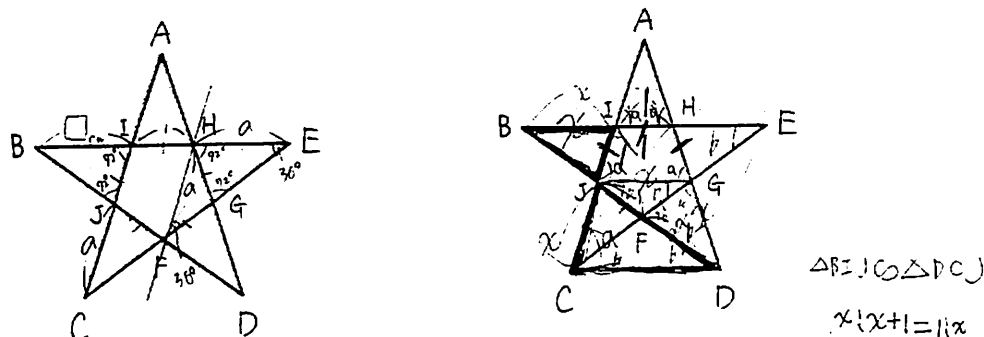
$AF : FB = BD : DC = CE : EA = 1 : 2$ のとき、 $\triangle ABC$ は $\triangle GHI$ の面積の何倍でしょうか？



平行線を引いた図

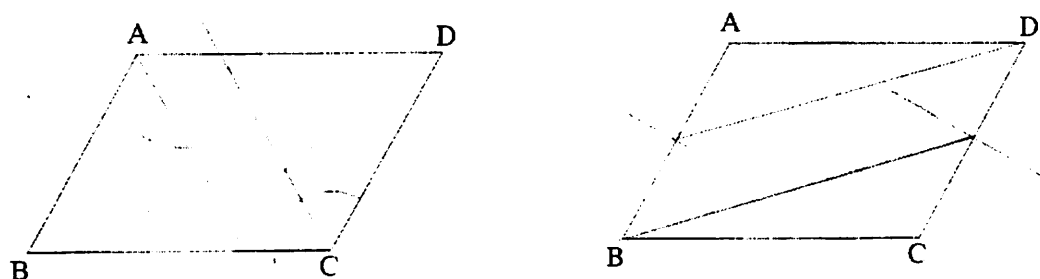


(参考)「相似の利用」の実践事例における生徒のワークシートから



この学年の生徒達は2学年の時に「平行四辺形になるための条件」の授業（活用型学習活動事例集「三角形と四角形」参照）において、補助線の引き方を学んでいる。そこでは、既習内容を活用することにより、補助線の引き方を工夫し、平行四辺形の作り方を考えさせるというものであった。既習内容とは1学年の時に学習した垂直二等分線や、角の二等分線のことであるが、教師が明確にその内容を活用させたため、生徒は既習の学習内容をより確かなものにする良い機会となった。

(参考)「平行四辺形になるための条件」の授業における生徒のワークシートから



その後は「三平方の定理」の単元において、補助線の引き方を指導することにした。直角三角形を作ることによって三平方の定理を利用できることから、接線と半径（弦）の関係や、1点から円に引いた接線の性質を活用させるように授業を計画した。

以上のように、補助線の引き方をテーマとし、図形領域において何度か「活用させる授業」を展開した。従来においても、補助線の引き方は指導されてきた内容であるが、活用させたい知識・技能、見方・考え方をより明確にしたことで、過去や今後の学習との繋がりをより意識するようになり、指導計画を見直す場面が増えた。

イ 単元や領域を越えた活用を意識させる指導を通して

「補助線の引き方」というテーマを意識して授業計画を立てていくことは、前述の通り単元を越えて指導内容を考えていくことになる。しかし、それほどの決まったテーマがなくとも、日頃の問題解決型の授業において、掲げる目標にプラスアルファできないかと常に考えるようになった。例えば、前述の「平行四辺形になるための条件」の授業について述べると分かりやすいのだが、その授業で生徒に身につけさせたいのは平行四辺形になるための条件である。そこに、1学年で学習した内容を盛り込み、補助線の引き方を学習させながら、平行四辺形の作り方を考えさせる。その後に条件を考えさせることになるので、一見時間がかかりそうにも思えるが、新学習指導要領への移行措置が始まった現在ならば、各単元においてこうした過去の学習を振り返らせる機会を増やしていくことは可

能であろう。以下は、「式の利用」の授業（活用型学習活動事例集「式の計算」参照）において、その授業において掲げる目標にプラスアルファした例である。

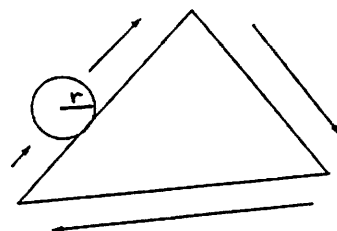
（参考）「式の利用」の授業における課題

（問題場面）

三角形の辺に沿って、半径 r の円を 1 周させる

（課題）

円が 1 周して三角形の周りにできた図形の面積と、中心が動いてできた線の長さの関係を調べてみよう。



面積や長さの計算をさせながら、文字式や因数分解を利用させていくのが本時において掲げる目標である。そこに、2 年次の図形領域で学習した内容、多角形の内外角の性質や、円が動いてできる図形を正しくとらえることなど、図形的な知識・技能をプラスアルファして活用させていく。

具体的には、円が 1 周するときに見える図形や中心の軌跡を生徒に描かせるようにし、軌跡が長方形と扇形を組み合わせた図形になることを考えさせる。また、生徒にとってイメージしにくい頂点を通り過ぎるときの軌跡について話し合わせるようにし、3 つの頂点を通り過ぎるときの軌跡を合わせると必ず円になる理由にも触れさせていく。

以上のように、1 つの課題解決の中に、生徒が既習の内容を活用するチャンスを増やそうと考えるようになった。もちろん、以前の授業においても、様々な知識・技能、見方・考え方を活用させようとしていたが、より意識するようになってきた。また、課題設定場面での活用や、課題解決後の振り返りの時間を、思い切って確保するように計画を立て直したのである。それは、学習指導要領改訂により年間指導計画を見直すことができるようになったからであるが、授業の中でいかに活用させるかを食欲に求めたことで、単に授業時数が増えたからというだけではなく、授業での指導の工夫につながったと確信している。

（2）実際の授業における変容

ここに述べるべき内容の多くは、「活用させる授業」を行う際の手だての項の内容と大きく重なってくる。3 つのキーワードをもとに、その手だてを整理し、実際の授業において常にそれを意識するようになったことが、大きな変容といえる。その結果、以前にも増して生徒の様子がよく見えるようになった。その理由の 1 つ目として、個別解決や、小集団の話し合いの時に、生徒の思考を促進させるために講じる手だてが増えたことで、生徒の考えをより多く引き出せるようになったことが挙げられる。2 つ目としては、生徒に自分の考えをていねいに表現させることで、以前は見落としていたかもしれない生徒の内言まで引き出せるようになったことが挙げられる。生徒達がお互いにアドバイスし合ったり評価し合ったりしているのと同時に、教師が生徒の考えについて評価する機会もより多くなったのである。

2 生徒の変容

(1) 数学の活用に関する調査の結果から

数学の活用に関する調査

学 校 番 号

① これはテストではありません。学校の成績には、まったく関係ありませんので、あなたの思ったとおりに答えてください。
次の各項目について、自分に最もあてはまると思う記号を選んでください。また、文意で書くところは、できるだけ具体的にわかりやすく書いてください。

① 数学は好きですか。次のア～オの中から、最もあてはまるものを選んでください。

ア 非常に好き
イ まあまあ好き
ウ 普通
エ どちらかと言うと好きではない
オ 好きではない

② 数学は、将来、日常生活に役立つと思いますか。次のア～エの中から、最もあてはまるものを選んでください。

ア 非常に役立つと思う
イ 時々役立つと思う
ウ 役に立つことはあってもめったにないと思う
エ 全く役に立たないと思う

③ 数学は、どんなところで役に立っていると思いますか。役に立っていると思うところを具体的に書いて下さい。

④ 今、品物には5%の消費税がかかっています。ある文房具屋の店員は、今後、税金の制度が変わって、消費税が5%から8%に変更になるという話を聞きました。そこであらかじめ8%に値上げすることにしました。ところが、値上げしたために、さっぱり売れなくなってしまいました。そこで、3%値下げしてもとの値段にしようと思い、計算したところ、もとの値段より安くなってしまいました。なぜでしょうか。その理由を書いてください。

⑤ 明日の体育の授業で、陸上競技を行うことになりました。体育係の雄輔さんは、校庭のトラックに幅1mのセパレートコースをつくり、内側から第1、2、3コースとすることにしました。しかし、それぞれコースにおいて1周を走る距離を等しくするためには、スタート地点をずらさなければならず、その場にいたあなたに相談を行いました。

あなたは、雄輔さんに対し、スタート地点についてどんなアドバイスをしますか。そのアドバイスの根拠となる考え方も答えなさい。

理由

⑥ 円を弦で分けて、いくつの部分に分けられるかを調べようと思います。
たとえば、円を1本の弦で分けると、下の図1のように2個の部分に分けられます。

図1



また、2本の弦で分けると、下の図2のように3個の部分に分けられる場合と、図3のように4個の部分に分けられる場合の2通りあります。

図2



図3



【問題】 円を7本の弦で分けることにします。このとき、円を最大何個の部分に分けられますか。また、その考えた理由も書いてください。

調べた結果 7本の弦で分けるとき、円は最大 個の部分に分けられる。

途中の考えや調べた内容

2008年、09年、そして今年の2月と3回（は2回）にわたり第3学年の生徒160人に対し、調査を実施してきた。初年度の調査において、数学が日常生活や将来役に立つとは考えていない生徒が多いこと、日常場面における具体的な問題を数学で学んだ知識・技能見方・考え方を活用して解決しようとする生徒はそれほど多くないという2つの

問題点が浮き彫りになった。そもそもこの調査結果（実態）から「活用させる授業」についての研究がスタートしたわけであるが、実際に生徒の意識がどのように変わったのかを調査の項目別に述べていきたい。

ちなみに、年に一度の調査結果をもとに変容が見られたと断定するわけではない。且頃の授業で教師が感じている生徒の変容について、調査結果にも同様のものが見られた場合、ある程度裏付けができたのではないかと判断したのである。

ア 数学の活用に関する調査 1 について

②「数学は、将来、日常生活に役立つと思いますか」という質問に対しては、3年間とも約60%がアまたはイと回答しており、どちらかという役に立つと考えている生徒が多い。本来ならば、少しでも多くの生徒がアまたはイと答えるように日々指導してきたかったが、残念ながら数値上は横ばいのままであった。

しかし、③「数学はどんなところで役に立っていると思いますか」という質問に対して、例年通りほとんどの生徒が、「買い物の計算に役に立つ」「くじが当たる確率が分かる」などの身の回りの事象について回答してくることを想定していたが、今年度は約1割の生徒が以下のような回答をしてきた（昨年度まではこのような回答はほとんどなかった）。（参考）「相似の利用」の実践事例における生徒のワークシートから

日常生活で、方程式も解いたり、直接役立ててはいないと思うけど、図形や計算を通して身につけた、いろいろな角度から物を見る力や、筋道立てて考える力など、そういうものは生活の中で無意識に使い、役立っていると思う。

- ・論理的に物事を考えること。→「どのように並べれば効率よく物事を進められるか」→規則性
例えば、文章構成を考えるとき。→もみぎりするとき。→計算
- ・物事をやりぬく力が重要になる。
(数学の問題を解くことで、あきらめず粘り続ける)

生徒が数学を活用していこうとするためには、より多くの数学的な知識・技能、見方・考え方が必要なのはもちろんのこと、数学が様々なところで役に立っているという前向きな姿勢が不可欠であると思う。

この回答からその姿勢が顕著に表れたとは言いがたいが、日々の授業において「多面的に考えること」「効率よく考えること」「一般化すること」などの見方・考え方の大切さを繰り返し指導してきたことによって、生徒の意識に変化が見られたのは確実である。

イ 数学の活用に関する調査 3 について

この項目は題意を正確に理解すること自体難しく、また理解したとしても7本の弦をすべてかいて数えた場合にはミスをしてしまうことが多い。正解にいたるまでの考え方はともかく、29個の部分に分けられると回答できたのは40%弱であった。

正答を導くことができた生徒のほとんどは、表などに表して変化の仕方に規則性があることを利用して考えていた。さらに、今年度においては正解者の4人に1人がn本の弦に対応する部分の数について考え、一般化していた。この対応を一般化するのは難易度が高く、一般化しようとした生徒はその前に変化の規則性より29本と導き出せていただろう。しかし、「一般化すること」をテーマとした指導の機会が「活用させる授業」において大幅に増えたことで、一般化することの大切さを理解し、あえて挑戦しようとした生徒が増

えたことにつながったのだと感じている。

(参考) 29本と導き出した理由をかいた生徒のワークシートから

理由 弦一本では2つに、弦2本では4つに分かれる。
表に示していく

弦の本数	1	2	3	4	5
部分数	2	4	7	11	16

と、規則的に増えていることが分かる。
この理論でいくと、6本目は22、7本目は29(個)の部分に分かれることになる。

最大で円を分けたい場合、糸が全部の糸に交わる時であり、2本で4個、3本で7個の規則から、
nのときは、

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{n^2+n}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2}{2}$$

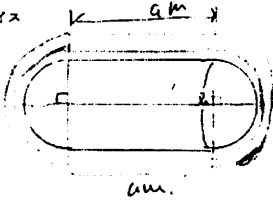
$$n=7 \text{ 代入して } \frac{7^2+7+2}{2} = 29$$
 (本)と表せるから

ウ 数学の活用に関する調査 4 について

この項目では、「コースが外側になるにしたがってスタート地点を $2\pi m$ 前にする」を正答として考えることにする。まず、正答率については、昨年度が30%だったのに対し、今年度は37%まで伸びた。正答率が伸びた要因には、生徒の思考力の向上はもちろんのこと、数学を活用しようとする意欲に変容が見られたことが大きく関わっていると感じている。

今年度特に感じたことは、まず無回答(またはそれと同等な回答)が減ったことである。具体的な数で言うと、昨年度までは160人中、10人以上いたのに対し、今年度は2人まで減った。回答についても、正答の生徒もそうでない生徒も図や式を活用して、ていねいに説明していた。次に、 π を約3として分かりやすく説明しようとした生徒が多かったことである。数学の問題としてとらえれば、 π のまま答えるのが正解だが、相手に分かりやすくという観点で回答した生徒が多くいた。考え方を分かりやすく表現しようとする全体的な意識の向上が良い結果に結びついていると確信している。

(参考) 実際にアドバイスをかいた生徒のワークシートから

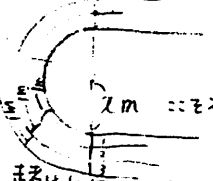
アドバイス  直線部分は、
通過の長さ(2bm)

曲線部分は、1レーンは $\pi b m$
(但しスタート位置は直線部分の中心より3.14bm)

2レーンは $\pi(b+2)$
 $\pi b + 2\pi m$
(3.14b + 6.28m)

3レーンは $\pi(b+4)$
 $\pi b + 4\pi m$
(3.14b + 12.56m)

よって、1レーン外側に居るにつれて、スタート位置を $2\pi m$ 前にずらす必要がある。(ただし、 π の代わりに3.14は無いので、 $+6m, +6m \times 2, +6m \times 3$ ののと和をとり、ずらす距離と考える。

アドバイス  カーブするときに、走る距離の差が生じるのだから、その差をいせはよい。(セムハートコースを一周するまで)

走者はほぼコースの中心を走り考える。
第1コースの走者がカーブ時に走る距離は
 $2 \times (0.5 + r) \times \pi = \pi + 2\pi r m$

第2コースは
 $2 \times (1.5 + r) \times \pi = 3\pi + 2\pi r m$

第3コースは
 $2 \times (2.5 + r) \times \pi = 5\pi + 2\pi r m$

差は $2\pi m$ ずつなので、
 $\pi = 3.14$ とし、
 $2 \times 3.14 = 6.28$
第1、第2、第3コースのスタート地点を
6.28m ずつずらす必要はないか。
個人的には直線延ばせるかべたかと思ってしまう。

(2) 授業においての生徒のノート・ワークシートから

ア 同じ生徒において1学年(5月)のノートと2学年(6月)のノートの比較
(参考) 生徒Aの1学年のノート(左)と2学年のノート(右)

乗法のルール

1. 分数の計算
2. 乗法のルール

① $(-3) \times (-4) = 12$ ② $(-3) \times (-5) = 15$ ③ $(-3) \times 0 = 0$

④ $(-0.25) \times (-0.5) = 0.125$ ⑤ $(\frac{1}{2}) \times (\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$

⑥ $(-3) \times (-4) \times (-5) = (-12) \times (-5) = 60$

⑦ $(-3) \times (-4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$

⑧ $(-3) \times (-4) \times (-5) = 12 \times (-5) = -60$

⑨ $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) = 12 \times 30 = 360$

⑩ $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7) = 12 \times (-21) = -252$

問題 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

① $(-3) \times (-4) = 12$ ② $(-3) \times (-5) = 15$ ③ $(-3) \times 0 = 0$

④ $(-0.25) \times (-0.5) = 0.125$ ⑤ $(\frac{1}{2}) \times (\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$

⑥ $(-3) \times (-4) \times (-5) = (-12) \times (-5) = 60$

⑦ $(-3) \times (-4) \times 5 = 12 \times 5 = 60$

⑧ $(-3) \times (-4) \times (-5) = 12 \times (-5) = -60$

⑨ $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) = 12 \times 30 = 360$

⑩ $(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7) = 12 \times (-21) = -252$

(参考) 生徒Bの1学年のノート(左)と2学年のノート(右)

16日(水) 魔方陣

あいているマスに1~9までの数を入れて完成せよ

1 2 3 4 5 6 7 8 9

180度

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9

問題 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

① 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

② 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

③ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

④ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

⑤ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

⑥ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

⑦ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

⑧ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

⑨ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

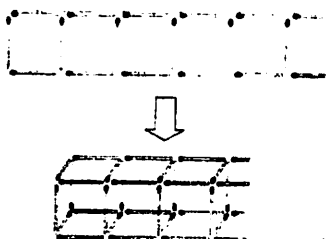
⑩ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

発達段階によってノートの整理の仕方が上達するのは当然だが、自分の考えがきちんと表現できるようになっていたり、級友の意見も上手にまとめられるようになっていたり、明らかに思考力の向上にプラスに働いた。

日頃から自分の思考を整理すること(自己の学習状況の認知に関わること)の大切さを指導してきた結果が表れたといえよう。

イ 同じ生徒において1学年6月のワークシートと1学年2月のワークシートの比較
(参考) 生徒Cの1学年6月のワークシート(上)と1学年2月のワークシート(下)

マッチ棒を何本か並べて、正方形をつなげた形をつくった。同じ本数のマッチ棒を使って、立方体をつなげた形に並べかえたら、何個も作れた。
はじめにできていた正方形の個数は何個でしょう。



自分の考え①

①の部分が6個分 $8 \times 6 = 48$

②の部分が4個分 $4 \times 4 = 16$

52本のマッチ棒で

そこから 11×11 の部分を引いて、5/2

それと 3×3 の部分を引いて、5/2 $\rightarrow 17$ $\rightarrow 17 \times 2 = 34$ $\rightarrow 34 + 18 = 52$ \rightarrow 正方形の数は17個になる
※ 11つの数字の意味が書いてある方が分かりやすいので、自分の考え以外のやつが分かった。

発展課題: 角柱や角錐では(頂)-(底)-2は成り立つのか

	角柱	四角柱	五角柱	六角柱	七角柱
頂	2	12	15	18	21
底	2	8	10	12	14
面	3	6	7	8	9
成り立つ	○	○	○	○	○

	角錐	四角錐	五角錐	六角錐
頂	1	6	8	10
底	1	4	5	6
面	2	5	6	7
成り立つ	○	○	○	○

(頂)-(底)-2は成り立つと思う。
理由は角錐のとき。

(頂)は1個ずつ増えていく

(底)は1個ずつ増えていく

(面)は1個ずつ増えていく

??

角錐について

六角錐の頂の数 2×6

(頂) 2×6

(底) $6 + 1$

[グループのメンバーにコメントを書いてもらいましょう]

六角錐の頂の数 2×6 $\rightarrow 12$
六角錐の底の数 $6 + 1$ $\rightarrow 7$
六角錐の面の数 $6 + 1$ $\rightarrow 7$
六角錐の体積 $\frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 6 = 72$

学年終了時には随分自分の考えを上手に表現できるようになってきた。さらに注目したいのはコメントの方で「文章で書くよりも式や図を使った方が分かりやすい」など、状況に応じて、よりふさわしい表現方法について理解できる生徒が増えてきた。

自分の考えを相手に分かりやすくきちんと表現させた上で、それについてコメントし合うことを繰り返し指導してきたことが、数学的思考力育成の一助となったことは間違いないであろう。

3 まとめ

思考力の伸びについて数値化するのが困難であることは最初に述べたが、教師も生徒も意識が変容したことは明らかであり、生徒が課題を解決する際、考えの表現の仕方についても変容が見られたのも上述の通りである。そして、それらが生徒の数学的思考力の伸びにプラスに働いたことは間違いないことであろう。

これまで、数多くの試行錯誤を経て「活用させる授業」を作る際の手だて、実際に授業を行う際の手だてが整理され、最終年度によりよく授業改善の方針が明確になった。その過程においては、一筋縄でいかないことも多々あった

が、工夫を重ねて活用させようと試みてきたことが生徒にも伝わり、良い結果が表れたのだと確信している。

6 おわりに

我々の研究の目標は「よりよい授業作り」をすることである。その方策の1つとして「活用させる授業」を指導計画の中に位置づけ、数学的思考力の育成をねらってきた。

その成果としては、ねらいが完全に果たされたとはいかないまでも、本研究の方向性が正しいことが明らかとなったことである。ただし「活用させる授業」が有効であったというより、活用させようと授業を工夫し続けてきたことが授業改善につながり、生徒にも好影響を与えたというと分かりやすいだろう。

課題としては、3年間の指導計画を見通して考えると、まだまだ授業改善・授業開発の余地が残されていることである。24年度から新学習指導要領が完全施行となるが、時数の増えた1学年・3学年での指導計画は特に見直していかなければならない。指導内容が増えただけでなく、学び直しの機会を増やして理解をより深めさせたり、数学的活動の機会を増やして数学を活用して考えようとする態度を育てていこうとしたりするための時間でもあるからである。それをふまえて考えると、今後も継続して授業作りをしていく必要がある。

新学習指導要領への移行措置が始まり、各学校においてそれを見据えた新しい指導計画を考案していることと思う。今後、数学を活用して考えようとする態度を育てるための授業を開発するにあたって、本研究の「活用させる授業」が諸先生方の参考になれば幸いである。本校においても引き続き授業改善・授業開発を行い、24年度に向けた準備を整えていきたいと考えている。

【主な参考文献】

- ・文部科学省 『中学校学習指導要領（平成10年12月）－解説－数学編』 大阪書籍
- ・文部科学省 教育課程部会2006年2月13日資料 『「活用」についての整理の例』
- ・文部科学省 国立教育政策研究所
『平成19年度・20年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』
- ・片桐重男著 『数学的な考え方の具体化と指導』 明治図書 2004年
- ・正田 實編 『数学の活用能力を伸ばす指導』 明治図書 1989年
- ・正田 實著 『改訂 数学科が求める新しい授業力』 明治図書 2008年
- ・全国算数授業研究会編
『算数授業研究 その不易と流行』 東洋館出版社 2008年
- ・小島 宏著 『算数科の思考力・表現力・活用力＜新しい学習指導要領の実現＞』
文溪堂 2008年
- ・中村享史著 「学習感想」による数学的な考え方の評価 『指導と評価』2004年
日本教育評価研究会 日本図書文化協会